MAT301 DİFERANSİYEL GEOMETRİ I FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

1) $P_0=(1,1)$, $P_1=(1,-1)$, $P_2=(0,2)\in\mathbb{R}^2$ verilsin. $\{P_0,P_1,P_2\}$ $\mathbb{R}^2$ de afin çatı oluşturur mu? (20 puan)

$\overrightarrow{P_0P_1}=(0,-2)$, $\overrightarrow{P_0P_2}=(-1,1)$ olup $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$ $\mathbb{R}^2$ için baz mıdır?

Lineer bağımsızlık:

$\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+\lambda_2\overrightarrow{P_0P_2}=0$ olsun.

$\Rightarrow \lambda_1(0,-2)+\lambda_2(-1,1)=0$

$\Rightarrow -\lambda_2=0\ ,\ -2\lambda_1+\lambda_2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

$\Rightarrow \{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$ Lineer bağımsızdır.

$\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$ lineer bağımsız olduğundan $boy\,\mathbb{R}^2=2$ ve $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$, $\mathbb{R}^2$ yi gerer. (n-boyutlu uzayda n tane vektörden oluşan Lineer bağımsız cümle uzayı gerer.)

$\Rightarrow \{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2}\}$ $\mathbb{R}^2$ için bazdır.

$\Rightarrow \{P_0,P_1,P_2\}$ $\mathbb{R}^2$ de afin çatıdır.

2) $F:E^2\to E^3$, $F(x_1,x_2)=(x_1^3-2x_2,\ x_1x_2,\ x_1^2x_2)$ dönüşümü veriliyor. $\vec{V}_p=(-1,2)|_p$ tanjant vektörü için $F_*|_p(V_p)=?$ (20 puan)

$$F_*|_p(\vec{V}_p)=\sum_{i=1}^{3}\vec{V}_p[f_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(p)}$$

$$=(\vec{V}_p[f_1],\vec{V}_p[f_2],\vec{V}_p[f_3])$$

$f_1(x_1,x_2)=x_1^3-2x_2$, $f_2(x_1,x_2)=x_1x_2$, $f_3(x_1,x_2)=x_1^2x_2$

$\vec{V}_p[f_1]=-1.(3x_1^2)|_p+2.(-2)|_p=-3p_1^2-4$

$\vec{V}_p[f_2]=-1.x_2|_p+2.x_1|_p=-p_2+2p_1$

$\vec{V}_p[f_3]=-1.(2x_1x_2)|_p+2.x_1^2|_p=-2p_1p_2+2p_1^2$

$\Rightarrow F_*|_p(\vec{V}_p)=(-3p_1^2-4,\ 2p_1-p_2,\ 2p_1^2-2p_1p_2)|_{F(p)}$

3) $\alpha(s) = \left(\frac{5}{13}\cos s, \frac{8}{13} - \sin s, -\frac{12}{13}\cos s\right)$ eğrisi için

a) $s \in I$ yay-parametresi midir?

b) $\alpha(\frac{\pi}{2})$ noktasındaki hız vektörünü bulunuz.

c) $\alpha(0)$ ve $\alpha(5)$ noktaları arasındaki yayının uzunluğunu bulunuz.

d) Eğriliklerini bulunuz

e) $\alpha(0)$ noktasındaki oskülatör düzleminin denklemini bulunuz.

(40 puan)

a) $\alpha'(s) = \left(-\frac{5}{13}\sin s, -\cos s, \frac{12}{13}\sin s\right)$

$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\frac{25}{169}\sin^2 s + \frac{144}{169}\sin^2 s + \cos^2 s} = 1 \Rightarrow s \in I$ yay-par. dı

b) $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = \left(-\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}\right)$

c) $\int_0^5 \|\alpha'(s)\| ds = \int_0^5 ds = (s+c)\Big|_0^5 = 5$ br.

d) $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$, $B(s) = T(s) \times N(s)$

$\Rightarrow \underline{T(s) = \left(-\frac{5}{13}\sin s, -\cos s, \frac{12}{13}\sin s\right)}$

$\alpha''(s) = \left(-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s\right)$, $\|\alpha''(s)\| = 1$

$\Rightarrow \underline{N(s) = \left(-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s\right)}$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} T & N & B \\ -\frac{5}{13}\sin s & -\cos s & \frac{12}{13}\sin s \\ -\frac{5}{13}\cos s & \sin s & \frac{12}{13}\cos s \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{B(s) = \left(-\frac{12}{13}, 0, -\frac{5}{13}\right)}$

$\kappa(s) = k_1(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$

$\tau(s) = k_2(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$

$$T'(s) = \left(-\frac{5}{13}\cos s, \sin s, \frac{12}{13}\cos s\right)$$

$$N'(s) = \left(\frac{5}{13}\sin s, \cos s, -\frac{12}{13}\sin s\right)$$

$$\Rightarrow \kappa(s) = k_1(s) = 1, \quad \tau(s) = k_2(s) = 0$$

e) $\alpha(0) = \left(\frac{5}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ olup oskülatör düzlemin normali,

$B(0) = \left(-\frac{12}{13}, 0, -\frac{5}{13}\right)$ dır.

$\Rightarrow$ Oskülatör düzlem,

$$-\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}z + d = 0$$

$\alpha(0)$ dan geçeceğinden,

$$-\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} - \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$\Rightarrow 12x + 5z = 0$$

5) $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(t) = \left(t+1, \frac{t^2}{2}, 2t\right)$ ve $\beta : I \to E^3$, $\beta(t) = \left(\frac{t^2}{2}, 3, -\frac{t^2}{4} + 5\right)$ eğrilerinin involüt evolüt eğri çifti oluşturduğunu gösteriniz. (20 puan)

$\forall t \in I$ için α nın teğet vektörü $\alpha'(t) = (1, t, 2)$

β nın teğet vektörü $\beta'(t) = \left(t, 0, -\frac{t}{2}\right)$ dır.

$$\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle = t + 0 - t = 0$$

$\Rightarrow \langle T, T^* \rangle = 0$ olup (α, β) involüt-evolüt eğri çiftidir.